ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ АВТОКОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ОДНОГО ПЕРИОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЗАДОВА-ЧУ

В.Э. Русанов, *к.т.н., доцент, Московский технический университет связи и информатики, rvvred52@rambler.ru.*

УДК 621.396.93

Аннотация. Статья посвящена аналитическому исследованию алгоритмов вычисления комплексных последовательностей Задова-Чу (*ZC*) и их корреляционных функций одного периода, вычисляемых при обнаружении преамбулы каналов случайного доступа [1]. В отличие от циклических комплексных последовательностей, корреляционные функции последовательности в виде одного периода имеет ненулевые уровни боковых лепестков, величина которых определяет помехоустойчивость синхронизации. Корреляционные функции традиционно используются для анализа случайных процессов [2, 3]. Последовательности *ZC* часто рассматриваются как псевдослучайные, подобные стохастическим последовательностям. Однако, последовательности *ZC* и их автокорреляционная функция (АКФ), по определению, не являются случайными. Они описываются формулами с детерминированными функциями [4, 5]. Аналитическое исследование этих формул в данной работе позволило уточнить ограничения на уровень боковых лепестков АКФ, а также получить более компактные выражения для АКФ без громоздких сумм, используемых при вычислении корреляции.

Ключевые слова: автокорреляционная функция; последовательность Задова-Чу; синхронизация; *LTE* стандарт мобильной связи.

RESEARCH OF THE PROPERTIES OF THE AUTOCORRELATION FUNCTION OF ONE PERIOD OF THE ZADOV-CHU SEQUENCE

Vladimir Rusanov, *candidate of technical sciences, assistant professor, Moscow Technical University of Communications and Informatics.*

Annotation. The article is devoted to an analytical study of algorithms for calculating complex Zadov-Chu (*ZC*) sequences and their correlation functions of one period, calculated when detecting the preamble of random access channels. Unlike cyclic complex sequences, the correlation functions of a sequence in the form of one period have non-zero levels of side lobes, the magnitude of which determines the noise immunity of synchronization. Correlation functions are traditionally used to analyze random processes. ZC sequences are often considered pseudorandom, similar to stochastic sequences. However, the sequences of *ZC* and their autocorrelation function (*ACF*), by definition, are not random. They are described by formulas with deterministic functions. The analytical study of these formulas in this work made it possible to clarify the restrictions on the level of the side lobes of the *ACF*, as well as to obtain more compact expressions for the ACF without cumbersome sums used in calculating the correlation.

Keywords: autocorrelation function; Zadov-Chu sequence; synchronization; *LTE* mobile communication standard.

Введение

Как известно, псевдослучайные последовательности широко используются при формировании синхросигналов систем связи [6]. Комплексная последовательность Задова-Чу определяется выражением [7]:

$c_k = \exp\,(j\varphi_k)$ k=0,….,N-1 ,

$$\varphi_k = \begin{cases} exp(-j\dfrac{\pi u k^2}{N}), & \text{если } N - \text{четное} \\ exp(-j\dfrac{\pi u k \times (k+1)}{N}), & \text{если } N - \text{нечетное} \end{cases}$$

Здесь u – параметр, называемый значением корня или индексом последовательности;

N – число элементов в периоде циклической последовательности.

Выбор параметров последовательностей u и N в виде взаимно простых чисел, например (25, 62), (29, 62), позволяет обеспечить нулевые боковые лепестки автокорреляционной функции для бесконечной циклической последовательности [8]. Эти последовательности используются в стандартах связи для синхронизации [9, 10]. Наряду с циклическими используются и последовательности ZC (u, N), состоящие из одного периода [11].

Автокорреляционная функция циклической последовательности может быть вычислена при циклическом сдвиге (или циклическом продолжении):

$$A_{1c}(m) = \sum_{i=1}^{N} c_i\, c_{i+m}^{*}\ .$$

Автокорреляционная функция одного периода цифровой последовательности с отбрасыванием неперекрывающихся элементов (нециклическая АКФ) определяется формулой:

$$A_1(m) = \sum_{i=1}^{N-m} c_i\, c_{i+m}^{*}\ .$$

Боковые лепестки АКФ таких последовательностей не равны нулю.

Графическое представление перемножаемых элементов последовательности при вычислении АКФ [12] представлено на рис.1:

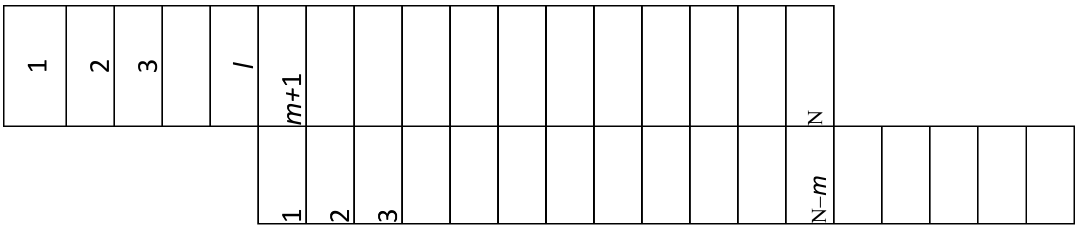

Рисунок 1

Вычисление АКФ предусматривает перемножение и суммирование перекрывающихся элементов (от m+1 до N для исходной последовательности и от 1 до N-m – для сдвинутой копии последовательности). Неперекрывающиеся элементы не входят в сумму. При вычислении АКФ для циклически повторяющейся M-последовательности неперекрывающиеся участки совмещаются путем циклического переноса (рис. 2):

m+1											N	1	2	3		m
1	2	3									N− m					N

Рисунок 2

Это циклическое совмещение соответствует формуле:

$$\sum_{i=1}^{N} c_i\, c_{i+m}^{*} = \sum_{i=1}^{N-m} c_i\, c_{i+m}^{*} + \sum_{i=1}^{m} c_i\, c_{N-m+i}^{*}\,.$$

Сумма в левой части равенства – это АКФ циклически повторяющейся *М*-последовательности. Как известно, все боковые лепестки этой последовательности одинаковы и равны 0.

$$0 = A_1(m) + \sum_{i=1}^{m} c_i\, c_{N-m+i}^{*}\,.$$

Тогда формула расчета АКФ одного периода *М*-последовательности может быть выражена через неперекрывающиеся элементы [12]:

$$A_1(m) = -\sum_{i=1}^{m} c_i\, c_{N-m+i}^{*}\,.$$

Формула справедлива для боковых лепестков нециклической АКФ при m>0. Для оценки боковых лепестков нециклической АКФ выразим сумму для автокорреляционной функции комплексной последовательности через модули и фазы отчетов (аргументов) этой последовательности:

$$A_1(m) = \sum_{i=1}^{m} c_i\, c_{N-m+i}^{*} = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{m}} |c_i||c_{N-m+i}| \cos\left(\arg[c_i] - \arg[c_{N-m+i}]\right).$$

Модули элементов последовательности по определению равны 1, поэтому:

$$A_1(m) = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{m}} \cos\left(\arg[c_i] - \arg[c_{N-m+i}]\right).$$

Из полученной формулы следует ограничение на модуль боковых лепестков, который не может превышать количество слагаемых в сумме. Это позволяет установить дополнительные ограничения на боковые лепестки АКФ, которые особенно существенны при малых аргументах корреляционного сдвига:

$$|A_1(m)| \le m - 1$$

Полученное ограничение может быть полезно для оценки помехоустойчивости корреляционной обработки при малых сдвигах. Аналогичное ограничение для АКФ *М*-последовательностей получены в [12]. В общем случае ограничения для боковых лепестков АКФ одного периода последовательностей Задова-Чу определяются численными расчетами.

Уровень боковых лепестков принято оценивать мерит-фактором, равным отношению квадрата максимума АКФ к среднеквадратическому значению боковых лепестков [13].

$$MF_m = \frac{A_1^2(0)}{\sum_{i=0}^{N} A_1^2(i)/N},$$

где: $A_1^2(0) = N^2$– величина квадрата максимума АКФ;
$A_1^2(i)$ – величина квадрата i-го отсчета боковых лепестков АКФ;
N – длина АКФ.

Значения мерит-факторов АКФ, рассмотренных выше примеров последовательностей, приведены в табл. 1:

Таблица 1.

u	N	M_f
25	62	31
29	62	26
34	62	29

Мерит-факторы рассмотренных нециклических последовательностей, в отличие от их циклических аналогов, не являются максимально возможными. Подбором параметров u и N можно найти последовательности с меньшими уровнями боковых лепестков (т.е., с большими значениями мерит-фактора). Рассмотрим алгоритм вычисления АКФ одного периода более подробно, что позволит его существенно упростить.

Автокорреляционная функция одного периода последовательности Задова-Чу определяется выражением:

$$A_1(m) = \sum_{i=1}^{N-m} c_i\, c_{i+m}^*.$$

Для оценки боковых лепестков нециклической АКФ выразим сумму для автокорреляционной функции комплексной последовательности через модули и фазы отчетов (аргументов) этой последовательности:

$$A_1(m) = \sum_{i=1}^{m-N} c_i\, c_{m+i}^* = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{m-N}} |c_i||c_{m+i}| \cos\left(\arg[c_i] - \arg[c_{m+i}]\right).$$

Модули элементов последовательности, по определению, равны 1, поэтому:

$$A_1(m) = \sum_{i=1}^{N-m} \cos\left(\arg[c_i] - \arg[c_{m+i}]\right).$$

Рассмотрим выражение для разности фаз β. Будем полагать длину периода последовательности четной.

$$\beta = \arg[c_i] - \arg[c_{m+i}] =$$

$$= -\frac{\pi u i^2}{N} + \frac{\pi u (m+i)^2}{N} = \frac{\pi u}{N}(-i^2 + m^2 + 2im + i^2 \quad) =$$
$$= \frac{\pi u}{N}(m^2 + 2im) = \left(2m\frac{\pi u}{N}\right) i + \frac{\pi u}{N} m^2 \ .$$

Как следует из определения, фазы элементов последовательности возрастают с ростом порядкового номера i квадратично. Разность фаз элементов последовательности линейно возрастает с ростом порядкового номера i элемента последовательности ZC. Благодаря этому свойству, мы в дальнейшем сможем воспользоваться известными формулами для сумм тригонометрических рядов [14].

$$A_1(m) = \sum_{i=1}^{N-m} \cos\left(i\left(2m\frac{\pi u}{N}\right) + \frac{\pi u}{N} m^2\right) = \sum_{i=1}^{m} \cos(xi + d)$$

Здесь параметры: $x = x[m] = 2m\frac{\pi u}{N}$; $d = d[m] = \frac{\pi u}{N} m^2$,

являются функциями корреляционного сдвига m.

Преобразуем косинус суммы по формулам тригонометрии:

$$A_1(m) = \sum_{i=1}^{N-m} \{\cos(x[m]i)\cos(d[m]) - \sin(x[m]i)\sin(d[m])\} =$$

$$= \cos(d[m]) \sum_{i=1}^{N-m} \cos(x[m]i) - \sin(d[m]) \sum_{i=1}^{N-m} \sin(x[m]i) \, .$$

Для вычисления сумм синус-рядов и косинус-рядов длиной n известны формулы:

$$\sum_{i=1}^{n} \sin(ix) = \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left[x\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} ,$$
$$\sum_{i=1}^{n} \cos(ix) = \frac{\sin\left[x\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} - 1/2 \ .$$

Подставим в формулы для сумм рядов пределы, нужные для вычисления АКФ:

$$\sum_{i=1}^{N-m} \sin(ix) = \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left[x\left(N-m+\frac{1}{2}\right)\right]}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \ ,$$

$$\sum_{i=1}^{N-m} \cos(ix) = \frac{\sin\left[x\left(N-m+\frac{1}{2}\right)\right]}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} - 1/2 \ .$$

В результате получим формулу для АКФ, не содержащую сумм и более удобную для расчетов:

$$A_1(m) = \cos(d[m])\left\{\frac{\sin\left(x[m]\left(N-m+\frac{1}{2}\right)\right)}{2\sin\left(\frac{x[m]}{2}\right)} - 1/2\right\} -$$
$$- \sin(d[m]) \frac{\cos\left(\frac{x[m]}{2}\right) - \cos\left[x[m]\left(N-m+\frac{1}{2}\right)\right]}{2\sin\left(\frac{x[m]}{2}\right)} \ .$$

В результате расчетов АКФ подобраны последовательности *Z (u, N)* с наилучшими значениями мерит-факторов M_f (табл. 2):

Таблица 2.

u	***N***	M_f**, дБ**
21	62	35
9	58	33
13	38	34
17	38	33
19	28	33

Здесь *N* – длина последовательности, *u* – значение корня. Для приведенных примеров расчетов удалось получить значительно более высокие значения мерит-факторов, чем для рассмотренных выше последовательностей: *ZC* (25, 62), *ZC* (29, 62), *ZC* (34, 62).

Полученные результаты можно сравнить с результатами расчетов АКФ *M*-последовательностей. Рассмотрим неприводимые образующие полиномы 6-й степени [15], генерирующие последовательности примерно сходной длины *N*=63 и определим АКФ для одного периода. Оценка уровня боковых лепестков АКФ посредством мерит-фактора приведена в табл. 3:

Таблица 3.

Обр. полином	***N***	M_f**, дБ**
103_8	63	27
141_8	63	26
133_8	63	25
147_8	63	27
155_8	63	25
163_8	63	25

Таким образом, приведенные примеры показывают, что последовательности Задова-Чу имеют преимущество в сравнении с *M*-последовательностями по уровню боковых лепестков АКФ одного периода.

Заключение

В результате исследований АКФ последовательностей *ZC* установлено, что величина боковых лепестков имеет следующее ограничение – модуль этой величины на единицу меньше, чем корреляционный сдвиг.

В результате использования выражений для сумм тригонометрических рядов удалось упростить формулу для АКФ. Полученная формула не содержит сумм и более удобна для расчетов.

По результатам расчетов установлено, что преимущество комплексных последовательностей по сравнению с *M*-последовательностями довольно существенно (мерит-фактор на 7-9 дБ выше). Для АКФ одного периода последовательностей, которые были оптимизированы для получения нулевых боковых лепестков циклической АКФ: *ZC* (25, 62), *ZC* (29, 62), *ZC* (34, 62) – это преимущество также сохраняется, только оно значительно меньше (по мерит-фактору на 3-5 дБ).

Литература

1. Казачков В О. Исследование реализации синхронизации по сигналам Задова-Чу в стандарте Long Term Evolution для канала с замираниями // Интернет-журнал «Науковедение» http://naukovedenie.ru, 2015. – Т. 7. – № 1.
2. Варакин Л.Е. Системы связи с шумоподобными сигналами. – М.: «Радио и связь», 1985. – 384 с.
3. Галажинская О.Н., Моисеева С.П. Теория случайных процессов. Часть 1 Учебное пособие, Томск, Издательский дом ТГУ, 2015.
4. Франк Р.Л., Задофф С.А. Импульсные коды со сдвигом фазы с хорошими свойствами периодической корреляции // ИРЭ. Поставить в известность. Теория (Корр.), ИТ-8, 1962. – Т. 1. – С. 381-382.
5. Хеймиллер Р.К. «Коды с фазовым сдвигом с хорошими свойствами периодической корреляции», IRE Trans. Поставить в известность. Теория, – В. ИТ-7. – С. 254-257.
6. Квашнина А.С., Баландин Д.О. Процедура первичной и вторичной синхронизации в сети 5G NR. Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Россия, г. Томск, 2015.
7. Бакулин М.Г. Бакулин Л.А., Варукина Б.В. Технология MIMO: принципы и алгоритмы. – Москва: Горячая линия – Телеком, 2014. – 242 с.
8. Киселева Т.П. Использование последовательностей Задова-Чу для синхронизации по корреляционной кривой циклического префикса OFDM символов LTE технологии // Цифровая обработка сигналов, 2020. – № 1.
9. Гельгор А.Л., Попов Е.А. Технология LTE мобильной передачи данных: учебное пособие Спб: Издательство Политехнического университета, 2011. – 204 с.
10. Шредер М.Р. Синтез сигналов с низким коэффициентом PCAK и двоичных последовательностей с низкой автокорреляцией, IEEE Trans. Теория (Корр.), 1970. – Т. 1. – В. ИТ-16. – С. 85-89.
11. Бабанов И.А., Андреев Р.А. Технологии доступа к сети 5G NR // Экономика и качество систем связи, 2019. – № 4 (14). – С. 45-53.
12. Rusanov V. Restriction of the M-sequence ACF sidelobes for minor arguments // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт, 2017, – № 3.
13. Киселева Т.П. Исследование свойств циклической автокорреляционной функции последовательности Задова-Чу в зависимости от характеристик квантования элементов последовательности // Цифровая обработка сигналов, 2018, – № 4. – С. 40-44.
14. Пак И.Н. О суммах тригонометрических рядов // УМН, 1980. – Т. 35. – В. 2. – С. 91-144.
15. Ипатов В.П. Периодические дискретные сигналы с оптимальными корреляционными свойствами / В.П. Ипатов. – М.: Радио и связь, 1992. – 152 с.