

ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ К РЕШЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

И.В. Прояева, к. ф.-м. н., доцент, Оренбургский государственный педагогический университет имени В.П. Чкалова, Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики (Оренбургский филиал), docentirina@mail.ru;
А.Н. Колобов, к.т.н., доцент, Оренбургский государственный педагогический университет имени В.П. Чкалова, Оренбургский государственный университет, kolobovan@ya.ru.

УДК 514(075.8):81(075.8)

Аннотация. В данной статье рассмотрены особенности изучения одного из актуальных разделов современной науки, входящих в рабочие программы большинства экономических и технических направлений высшей школы. Основное внимание в работе авторы акцентируют на применении теоретических фактов к решению практических задач. Важность и трудность изучения теории связана, в первую очередь, с многогранностью и вариативностью математических методов. Выделяются и описываются интересные свойства, рассматриваются различные их классификации. Значительное внимание уделяется методической схеме изучения. Представленная в статье методика введения основных методов изучения данного вопроса была реализована в конкретном учебном процессе на занятиях по курсам «Теория принятия решений», «Теория массового обслуживания» бакалавров по направлению «Информационные системы и технологии» Оренбургского филиала Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, что позволило повысить эффективность усвоения изучаемого материала обучающимися.

Ключевые слова: математическая модель; объект; оптимизация; выбор параметра; исследование операции.

FEATURES OF THE APPLICATION OF MATHEMATICAL MODELING FOR SOLVING PRACTICAL PROBLEMS

I.V. Proyaeva, Ph.D., Associate Professor, Orenburg State Pedagogical University named after V.P. Chkalov, Volga Region State University of Telecommunications and Informatics (Orenburg branch);

A.N. Kolobov, Ph.D., Associate Professor, Orenburg State Pedagogical University named after V.P. Chkalov, Orenburg State University.

Annotation. This article examines the features of studying one of the relevant sections of modern science included in the work programs of most economic and technical areas of higher education. The authors focus on the application of theoretical facts to the application of practical tasks. The importance and difficulty of studying theory is primarily related to the versatility and variability as such. Interesting properties are highlighted and described, and their various classifications are considered. Considerable attention is paid to the methodological scheme of the study. The methodology presented in the article for introducing the main methods of studying this issue was implemented in a specific educational process in the classes on the courses «Theory of Decision-Making», «Theory of Mass Service» of bachelors in the field of «Information Systems and Technologies» and made it possible to increase the efficiency of assimilation of the studied material by students.

Keywords: mathematical model; object; optimization; parameter selection; operation study.

Введение

Одной из важнейших проблем в различных областях знаний (экономике, технике, естествознании, управлении и организации производства, военном деле, на транспорте и т.д.) является поиск оптимального варианта решения среди множества других (проблема выбора) [1].

Суть проблемы состоит в следующем:

- есть объект, описываемый некоторой системой параметров;
- есть совокупность условий (ограничений), которым эти параметры подчиняются;
- существует, как правило, множество вариантов изменения параметров, удовлетворяющих указанным ограничениям;
- известен показатель качества, позволяющий выбрать из множества вариантов оптимальный [2].

Задачи поиска оптимального варианта решения проблемы называются задачами оптимизации [3].

Описанные выше особенности задач оптимизации (наличие большого числа параметров и связей между ними, количественное выражение условий и целей задачи) требуют для их решения привлечения научных методов.

Целью изучения и представления материалов данной статьи является обоснование необходимости изучения теории математического моделирования как одного из главных разделов современной науки в эпоху цифрового развития и массовых коммуникаций.

Методы решения задач оптимизации

Комплекс научных методов решения и анализа задач оптимизации, научного обоснования результатов составляет раздел науки, называемый исследованием операций. Данный раздел посвящен изучению теории системного анализа различных задач в экономике, планировании, управлении, на транспорте и в других областях знаний, позволяющих выработать оптимальную стратегию решения проблемы [4].

Исследование операций дает возможность найти метод решения конкретной задачи, проанализировать полученный результат, дать математическое обоснование, получить сравнительные оценки различных вариантов, оценить влияние параметров на результат операции, исследовать узкие места, т.е. элементы системы, нарушение которых влияет на этот результат.

Основные этапы решения задач оптимизации:

I. Постановка задачи.

Первоначально задачу формулируют с точки зрения заказчика. На этом этапе задача постепенно уточняется:

- определяются элементы и факторы, присутствующие в задаче, устанавливаются связи между ними, ограничения на их изменения (в задаче планирования производства некоторой продукции – это ресурсы, их объем и расход на выпуск продукции, виды оборудования и производственные мощности, ассортиментные соотношения, потребности и т. д.) [5];

- устанавливаются цели (минимизировать затраты, максимизировать прибыль или выпуск продукции и т. п.), определяются средства, необходимые для достижения цели, и способы их использования;
- определяются исходные данные, их наличие, способы и сроки их получения;
- изучаются различные подходы к решению задачи и возможные результаты;
- доказываемся корректность поставленной задачи (непротиворечивость условий и целей);
- оценивается возможный эффект результата [6].

При постановке задачи могут быть определены различные целевые объекты, которые необходимо оптимизировать (прибыль, выпуск продукции, производительность, затраты материалов, времени и других ресурсов). Однако нельзя требовать достижения оптимума по нескольким показателям. Корректной является такая постановка задачи, в которой подлежит оптимизации один критерий. Учет остальных показателей достигается различными способами. В частности, эти показатели могут быть включены в систему ограничений на их изменения. При этом рекомендуется провести анализ и оценку различных вариантов.

При любой постановке задачи оптимизации необходимо выполнение следующих условий:

- следует определить, по какому критерию решение должно быть оптимальным;
- должно существовать не менее двух вариантов решения.

II. Построение математической модели [7].

Как уже указывалось, задачи по оптимизации имеют следующие особенности:

- ограниченность средств, необходимых для достижения цели (например, материальных, трудовых, энергетических, денежных);
- наличие большого числа факторов и связей между ними;
- многовариантность решений.

Все эти особенности не позволяют решить такую задачу путем рассуждений и умозаключений. Очевидно, здесь требуется привлечение математического аппарата. Поэтому и содержательную постановку задачи необходимо представить в математической форме – построить ее математическую модель [8].

Итак, для построения математической модели конкретной задачи необходимо:

- установить, что мы принимаем в качестве целевой функции (показателя качества, критерия оптимальности);
- представить связи и ограничения, налагаемые на переменные, в виде соотношений функций, определяющих зависимости между переменными и целевой функцией;
- представить критерий оптимальности в виде целевой функции.

III. Выбор метода решения.

Математическая постановка позволяет классифицировать задачи из различных областей по типам, к каждому из которых возможно применение того или иного математического метода. Выбор метода зависит от характера целевой

функции и функций, определяющих зависимости между переменными, способов задания параметров, способов изменения некоторых величин.

Совокупность этих методов составляет математический аппарат исследования операций, называемый математическим программированием.

В соответствии с классификацией задач математическое программирование содержит следующие основные разделы:

- линейное программирование;
- целочисленное (дискретное) программирование;
- динамическое программирование;
- нелинейное программирование;
- стохастическое программирование;
- элементы теории игр [9].

Таким образом, в зависимости от характера исследуемой модели устанавливается метод решения задачи. Формализация (математическая постановка) и выбор метода решения задачи позволяют отвлечься от ее реального содержания и могут быть использованы для решения различного рода экономических, технических и других задач.

IV. Реализация метода (решение задачи).

В соответствии с выбранным методом составляется алгоритм решения задачи, который далее реализуется с помощью компьютера или вручную.

V. Анализ результатов и корректировка модели.

По результатам решения задачи выполняется анализ построенной модели, сравнение с предварительными оценками и, в случае необходимости, корректировка некоторых условий и исходных данных.

VI. Реализация решения на практике.

После анализа и корректировки задачи результаты выдаются заказчику [10].

Рассмотрим пример алгоритма решения задачи с использованием симплекс-метода в общем виде.

В одном крупном предприятии есть несколько отделов, каждый из которых выполняет определенные задачи. У каждого отдела есть определенный бюджет и набор ресурсов, часть из которых можно передавать отделу от других отделов. Необходимо оптимизировать распределение ресурсов между отделами, чтобы максимизировать выполнение задач при ограниченных ресурсах и сохранении бюджета. Задача состоит в определении оптимального количества каждого ресурса, которое должен получить каждый отдел, чтобы максимизировать производительность в целевом показателе, таком как количество выполненных задач. У каждого отдела есть список ресурсов, которые они могут получить от других отделов, и требования по количеству каждого ресурса для выполняемых ими задач. Каждый ресурс имеет свою стоимость, и бюджет отдела ограничивает сколько ресурсов он может приобрести. Отделы также могут иметь ограничения по минимальному и максимальному количеству определенных ресурсов.

Задача заключается в поиске оптимального распределения ресурсов между отделами, чтобы максимизировать выполнение задач, удовлетворяя бюджетным ограничениям и ограничениям на количество ресурсов, которые отдел может использовать для каждой задачи. Целевая функция будет выражаться в виде линейной комбинации выполненных задач отделами, а ограничения будут выражены в виде линейных неравенств, связанных с бюджетными ограничениями и ограничениями на количество ресурсов. Таким образом, задача линейного

программирования будет состоять в определении оптимальных значений ресурсов для каждого отдела, удовлетворяющих всем ограничениям и максимизирующих целевую функцию, такую как количество выполненных задач [11].

Решение:

1. Формулировка целевой функции и ограничений.

В качестве целевой функции можно выбрать количество выполненных задач отделами. Пусть X_1, X_2, \dots, X_n – количество ресурсов, выделенных отделам 1, 2, ..., n соответственно. Тогда целевая функция будет иметь вид:

Целевая функция: $F = a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n$,

где: a_1, a_2, \dots, a_n – коэффициенты, отображающие вклад каждого ресурса в выполнение задачи. Вес каждого ресурса может быть задан на основе их важности для выполнения задач отделов.

Ограничения могут быть выражены в виде:

Ограничения бюджета: $b_1X_1 + b_2X_2 + \dots + b_nX_n \leq B$

где: b_1, b_2, \dots, b_n – стоимость каждого ресурса, а B – бюджет предприятия.

Ограничения на количество ресурсов:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_1 \leq X_1 \leq \max_1 \\ \min_2 \leq X_2 \leq \max_2 \\ \dots \\ \min_n \leq X_n \leq \max_n \end{array} \right.$$

где: $\min_1, \min_2, \dots, \min_n$ – минимальное количество ресурсов, необходимое отделам для выполнения задач, а $\max_1, \max_2, \dots, \max_n$ – максимальное количество ресурсов, которые отделы могут использовать для каждой задачи [12].

2. Трансформация задачи в стандартную форму линейного программирования.

Чтобы применить симплекс-метод, задачу необходимо привести к стандартной форме линейного программирования. Для этого можно заменить ограничения на количество ресурсов на равенства, добавив новые переменные-штрафы и базисные переменные, чтобы ограничения стали равенствами.

3. Решение задачи симплекс-методом.

После преобразования задачи в стандартную форму линейного программирования, можно применить симплекс-метод для нахождения оптимального решения. Симплекс-метод основан на движении по вершинам многогранника, ограниченного условиями задачи, для поиска оптимального решения. Каждый шаг симплекс-метода выполняет пересчет базисных и небазисных переменных.

4. Проверка оптимальности и интерпретация результата.

После выполнения симплекс-метода необходимо проверить, достигнуто ли оптимальное решение. Если оптимальное решение найдено, то можно интерпретировать результаты и определить оптимальное количество ресурсов, которое должен получить каждый отдел для максимизации выполнения задач [13].

Вывод: для решения задачи оптимизации распределения ресурсов между отделами и максимизации выполнения задач можно применить метод линейного программирования, такой как симплекс-метод. Этот метод позволяет найти оптимальное решение с учетом ограничений на бюджет и количество ресурсов для каждого отдела.

Применение математического моделирования к решению задачи

Рассмотрим решение задачи в общем виде на примере изготовления варенья из различных ингредиентов. Для изготовления различных видов варенья

используют n видов ягод S_1, S_2, \dots, S_n с ограниченным объемом b_1, b_2, \dots, b_n соответственно, a_{ij} – это количество единиц i -й ягоды, необходимое для приготовления одной единицы j -го варенья. Варенье можно приготовить в количестве не более d_1, d_2, \dots, d_n соответственно. Прибыль от продажи одной единицы j -го варенья составляет c_j . Необходимо составить план варки варенья, который обеспечит получение максимальной прибыли от продажи.

Для решения данной задачи можно использовать метод линейного программирования [14]. Мы хотим найти максимальное значение функции прибыли:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n,$$

при следующих условиях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases},$$

где: x_j – количество варенья j -го вида, которое мы хотим приготовить.

$$\begin{cases} x_1 \leq d_1 \\ x_2 \leq d_2 \\ \dots \\ x_n \leq d_n \end{cases}.$$

Задача сводится к нахождению максимального значения функции Z при данных ограничениях. Для этого можно использовать программу «Excel» или другую специализированную программу для решения задач линейного программирования [15].

Заключение

В настоящее время в экономических условиях необходимо уметь тщательно рассчитывать и планировать любые действия, направленные на достижение выгодных результатов. Методы математического программирования могут применяться на промышленных объектах при оптимизации производственной программы, составлении оптимального плана перевозок, решении производственно-транспортных задач и т.д. [15].

Несмотря на достоинства описанных методов присутствуют и их недостатки. Недостаток симплекс-метода – это необходимость пересчета всех коэффициентов и свободных членов системы уравнений, что увеличивает объем работы. Недостатком геометрического метода является невозможность его применения для пространств размерностью больше трех. Довольно трудоемкий процесс проходит при решении задач венгерским методом.

Результаты данного раздела современной науки успешно применяются в военной области, сельском хозяйстве, индустрии, транспортной отрасли, экономике, системе здравоохранения и в технике. Широкое использование этого метода подкрепляется высокоэффективными компьютерными алгоритмами, реализующими данный метод [16]. Материал статьи может быть полезен студентам высших учебных заведений, учащимся на математических, инженерных и экономических специальностях.

Литература

1. Прояева И.В. Компетентный подход в преподавании математических дисциплин на инженерных специальностях // Материалы I Международной очно-заочной конференции. Оренбург, ПГУТИ, 2015.
2. Балдин К.В. Математическое программирование: учеб. пособие [Текст]. – 2-е изд. – М.: Дашков и К, 2023. – 220 с.
3. Прояева И.В. Роль компетентно-ориентированных задач в преподавании математических дисциплин на инженерных специальностях // II Международная научно-практическая очно-заочная конференция. Проблемы и перспективы инновационных телекоммуникационных технологий, Оренбург, 2016.
4. Прояева И.В. Об организации компетентно-ориентированного подхода самостоятельной работы бакалавров по математическим дисциплинам на технических специальностях ВО // Реализация компетентного подхода в сфере инженерной подготовки (авторская монография), ООО АЭТЕРНА, г. Уфа. 2017, – С. 101-106.
5. Веремченко Т.В. Высшая математика: учеб.-метод. пособие: В 4 ч. [Текст]. – 2-е изд., испр. – Минск: ГИУСТ БГУ, 2010. – Ч. 4 Математическое программирование. – 158 с.
6. Воробьева Ф.И. Информатика. MS Excel 2010: учеб. пособие [Текст]. – Казань: КНИТУ, 2014. – 96 с.
7. Гераськин М.И. Линейное программирование: учеб. пособие [Текст]. – Самара: Издательство СГАУ, 2014. – 104 с.
8. Исследование операций – [Электрон. текст. данные]. – Режим доступа: <https://ru.wikipedia.org/wiki>
9. Киселева Э.В. Математическое программирование [Текст]. Новосибирск, 2002. – 146 с.
10. Кузютин Д.В. Курс «Методы оптимизации и исследование операций». Введение в линейное программирование [Текст]. – [Электрон. текст. данные]. – Режим доступа: www.apmath.spbu.ru/ru/staff/kuzjutin.d/
11. Лебедев А. Понятный самоучитель Excel 2013 [Текст]. – СПб.: Питер, 2014. – 128 с.
12. Линейное программирование – [Электрон. текст. данные]. – Режим доступа: <https://ru.wikipedia.org/>
13. Мунасыпов Н.А. Линейное программирование [Текст]. – Оренбург: ООО «Агентство Пресса», 2015. – 121 с.
14. Палий И.А. Линейное программирование: учеб. пособие [Текст]. – М.: Эксмо, 2022. – 256 с.
15. Решение задач линейного программирования графическим методом – [Электрон. текст. данные]. – Режим доступа: <http://1cov-edu.ru/lineynoe-programmirovaniye/graficheskiy-metod>
16. Солодовников А.С. Математика в экономике: учеб.: В 2 ч. [Текст]. – 3-е изд. – М.: Финансы и статистика. – Ч. 1. Линейная алгебра, аналитическая геометрия и линейное программирование, 2013. – 384 с.